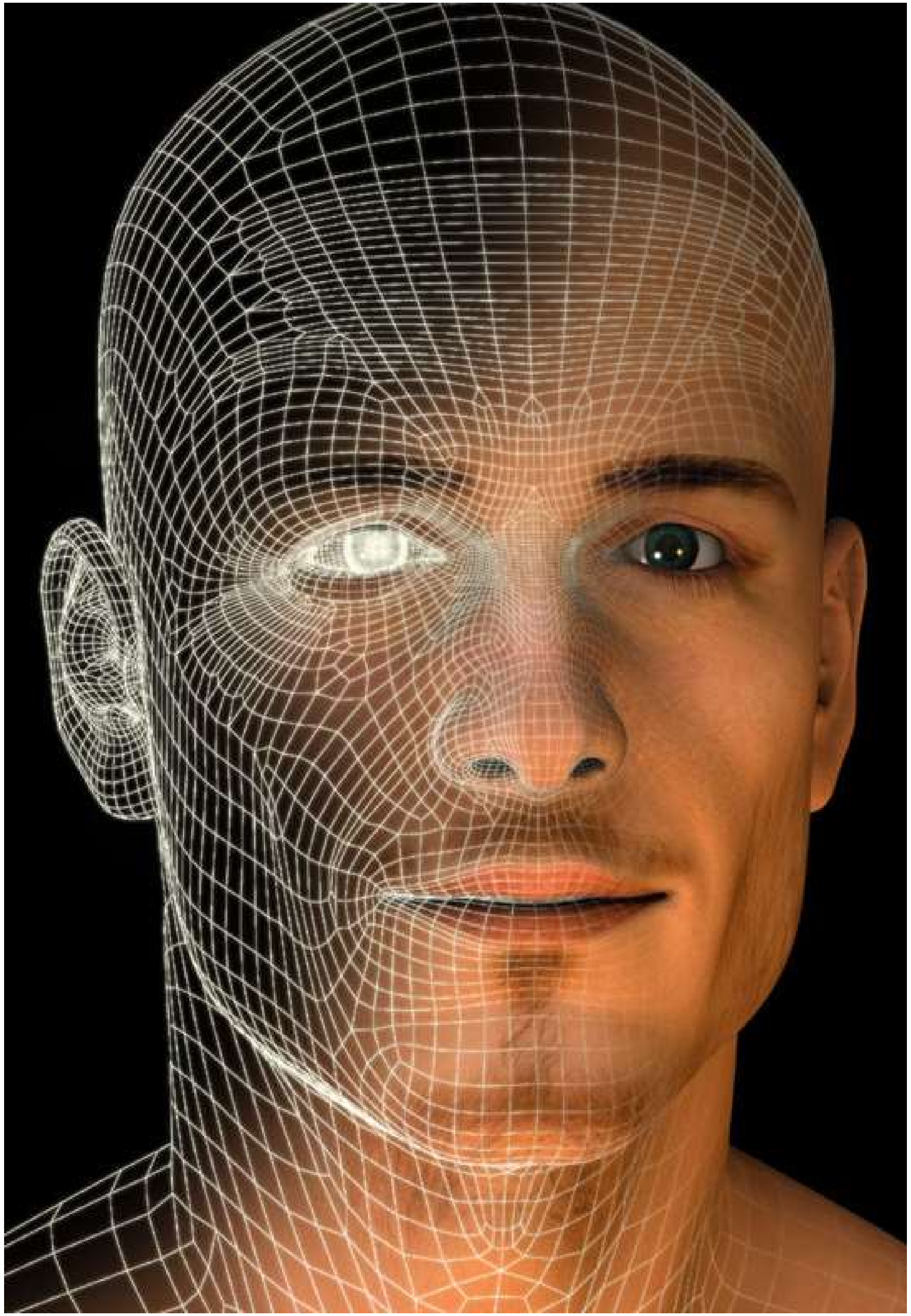


Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής

ΤΕΙ Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης

Γραφικά Υπολογιστών

ΣΤ’ Εξάμηνο

Δρ Κωνσταντίνος Δεμερτζής

$6^{η}$ Ενότητα

Μετασχηματισμοί

Γραφικά Υπολογιστών

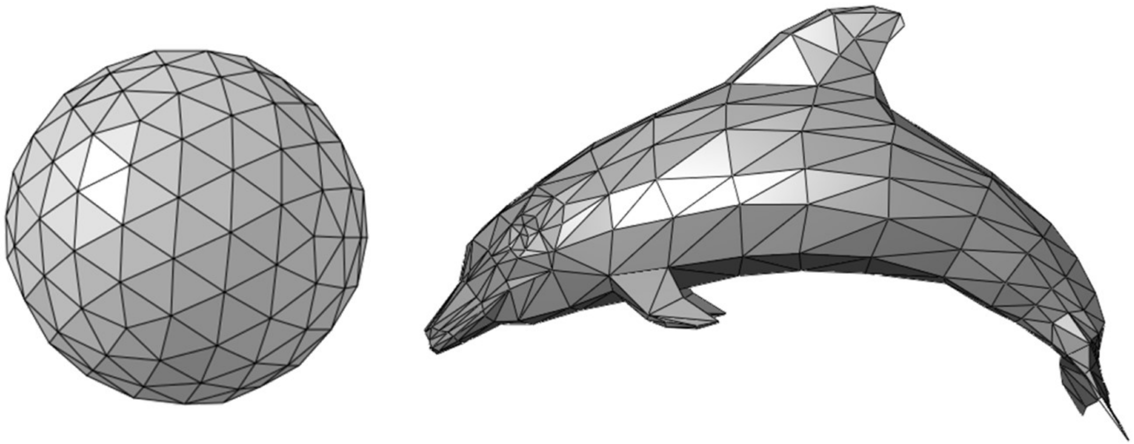
kdemertz@fmenr.duth.gr

Μετασχηματισμοί

- ✓ *Κατά τον σχηματισμό του εικονικού κόσμου και την αλληλεπίδραση του χρήστη με αυτόν, οι συντεταγμένες των εικονικών αντικειμένων αλλάζουν πολύ συχνά: κάθε αντικείμενο δίνεται σε μία αρχική θέση και μέγεθος, όμως κατόπιν τοποθετείται στον εικονικό κόσμο αλλάζοντας θέση, προσανατολισμό και μέγεθος.*
- ✓ *Επίσης ο χρήστης κινείται μέσα στον εικονικό κόσμο και επομένως αλλάζουν αυτά που βλέπει και συγκεκριμένα οι συντεταγμένες των αντικειμένων ως προς αυτόν.*
- ✓ *Η κίνηση και γενικότερα η δυναμική είναι ένα εγγενές στοιχείο των συστημάτων γραφικών. Έτσι πρέπει να υπάρχει η δυνατότητα να αλλάζουν κάποιες ιδιότητες πολλών εκ των αντικειμένων μιας σκηνής. Για παράδειγμα ένα αυτοκίνητο εν κινήσει «μεταφέρει» και «περιστρέφει» τη γεωμετρία του στον εικονικό κόσμο. Ακόμα είναι δυνατό να χρησιμοποιούνται αντίγραφα ενός αντικειμένου (π.χ. δένδρο) σε διαφορετικές κλίμακες και σε διαφορετικές θέσεις.*
- ✓ *Το μαθηματικό εργαλείο για την υλοποίηση όλων των παραπάνω παραδειγμάτων είναι οι μετασχηματισμοί, οι οποίοι συνθέτουν μία από τις πλέον θεμελιώδεις έννοιες των συστημάτων γραφικών.*

Μετασχηματισμοί

- *Οι επιφάνειες των αντικειμένων στα Γραφικά δημιουργούνται με τη βοήθεια απλών γεωμετρικών σχημάτων (συνηθέστερα τριγώνων) που ενώνονται μεταξύ τους.*
- *Με τη βοήθεια των Μαθηματικών μπορεί να δειχθεί ότι για να μετασχηματιστεί ένα τέτοιο απλό σχήμα, αρκεί να εφαρμοστεί ο αντίστοιχος μετασχηματισμός μόνο στις κορυφές του και οι μετασχηματισμένες κορυφές θα σχηματίσουν ακριβώς το ζητούμενο μετασχηματισμένο σχήμα.*
- *Αντίστοιχα, για να μετασχηματιστεί ένα ολόκληρο αντικείμενο αρκεί να μετασχηματιστούν μόνο οι κορυφές του.*



Γραφικά Υπολογιστών

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

- ✓ *Έστω ένα 3Δ σύστημα συντεταγμένων Σ1, στο οποίο ένα σημείο P εκφράζεται μέσω των συντεταγμένων του (x,y,z). Έστω τώρα ένα δεύτερο σύστημα συντεταγμένων Σ2, στο οποίο το ίδιο σημείο εκφράζεται μέσω των συντεταγμένων (a,b,c), οι οποίες μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικός συνδυασμός των συντεταγμένων (x,y,z) του Σ1.*

$$a = w_1 x + w_2 y + w_3 z + t_1$$

$$b = w_4 x + w_5 y + w_6 z + t_2$$

$$c = w_7 x + w_8 y + w_9 z + t_3$$

- ✓ *Οι παραπάνω σχέσεις ορίζουν ένα γραμμικό μετασχηματισμό του Σ1 στο Σ2 που μπορεί να γραφεί ως:*

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ w_4 & w_5 & w_6 \\ w_7 & w_8 & w_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$

Γραφικά Υπολογιστών

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

- *Υπό την προϋπόθεση ότι ο μετασχηματισμός είναι αντιστρέψιμος, ο γραμμικός μετασχηματισμός του Σ2 στο Σ1 προκύπτει ως:*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ w_4 & w_5 & w_6 \\ w_7 & w_8 & w_9 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \right)$$

- *Το διάνυσμα t=(t1, t2, t3) αντιστοιχεί στη μεταφορά της αρχής των αξόνων του Σ1, ώστε αυτή να συμπέσει με αυτή του Σ2, ενώ ο πίνακας W, συνήθως, σε επανυπολογισμό των διανυσμάτων βάσης. Στις επόμενες παραγράφους και πιο συγκεκριμένα στους ομογενείς μετασχηματισμούς θα δούμε έναν έξυπνο τρόπο να συνδυάσουμε έναν μετασχηματισμό που απαρτίζεται από έναν 3x3 πίνακα W και ένα διάνυσμα t σε έναν και μόνο πίνακα διάστασης 4x4.*

Γραφικά Υπολογιστών

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων - Μεταφορά

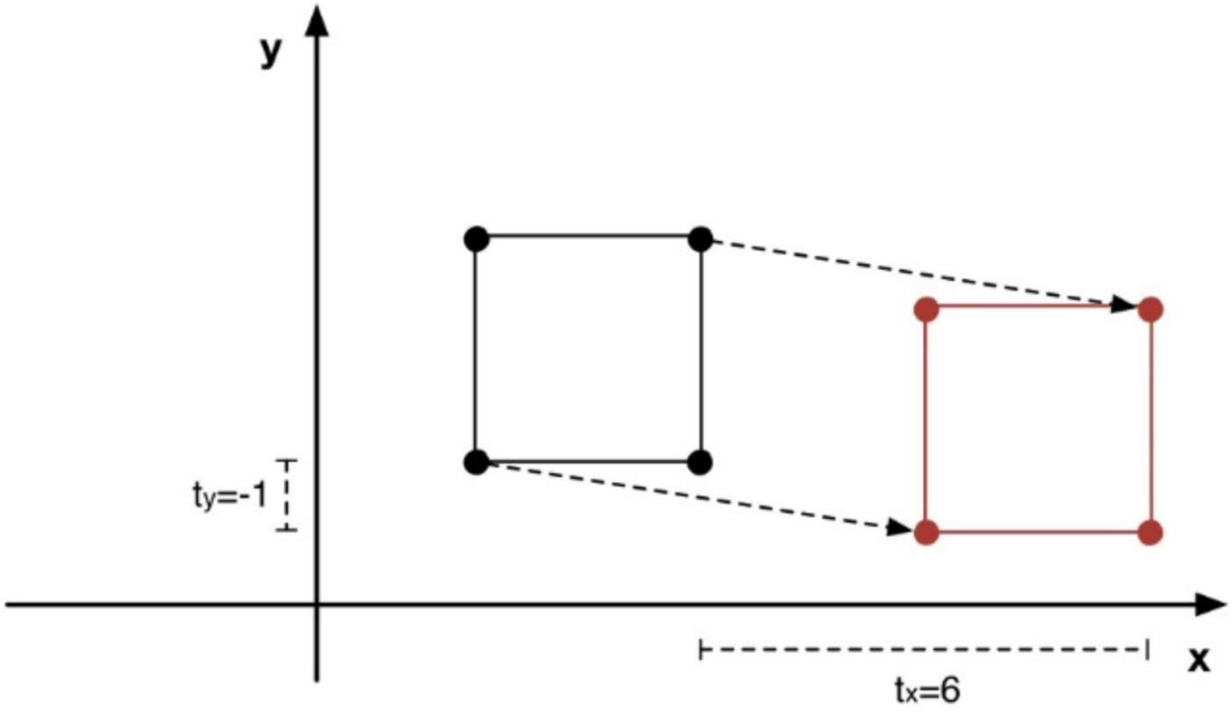
- ✓ *Ο μετασχηματισμός μεταφοράς περιγράφει τη μετακίνηση προς συγκεκριμένη κατεύθυνση κατά συγκεκριμένη απόσταση. Σημαντική πληροφορία για την υλοποίηση του μετασχηματισμού μεταφοράς είναι η ποσότητα της μετακίνησης tx και ty στον άξονα των x και των y αντίστοιχα. Στις 2Δ, ένα σημείο p1=(x,y) μπορεί να μεταφερθεί κατά t=(tx,ty) και το νέο σημείο p2 προκύπτει ως εξής:*

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{t} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{bmatrix}$$

Γραφικά Υπολογιστών

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων - Μεταφορά

- *Μεταφορά αντικειμένου με διάνυσμα μετατόπισης (6, -1)*



Γραφικά Υπολογιστών

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων - Μεταφορά

- ✓ *Ο μετασχηματισμός μεταφοράς γενικεύεται εύκολα στις τρεις διαστάσεις, όπως περιγράφει η παρακάτω σχέση:*

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{t} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ z + t_z \end{bmatrix}$$

Γραφικά Υπολογιστών

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων - Αλλαγή Κλίμακας

✓ *Ο μετασχηματισμός αλλαγής κλίμακας επηρεάζει και μεταβάλλει εξ' ορισμού το μέγεθος των αντικειμένων. Σημαντική πληροφορία για την υλοποίηση του μετασχηματισμού αλλαγής κλίμακας είναι η ποσότητα της μεγέθυνσης ή σμίκρυνσης sx και sy στον άξονα των x και των y αντίστοιχα. Στις 2D, ένα σημείο p1=(x,y) μπορεί να κλιμακωθεί με τη χρήση ενός πίνακα κλιμάκωσης S και το νέο σημείο p2 προκύπτει ως εξής:*

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \end{bmatrix}$$

Γραφικά Υπολογιστών

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων - Αλλαγή Κλίμακας

- ✓ *Στην περίπτωση όπου sx=sy=s, μιλάμε για ομοιόμορφη αλλαγή κλίμακας, όπου η κλιμάκωση λαμβάνει χώρα με τον ίδιο τρόπο και ως προς τους δύο άξονες. Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας S μπορεί να αντικατασταθεί με τη βαθμωτή ποσότητα s.*

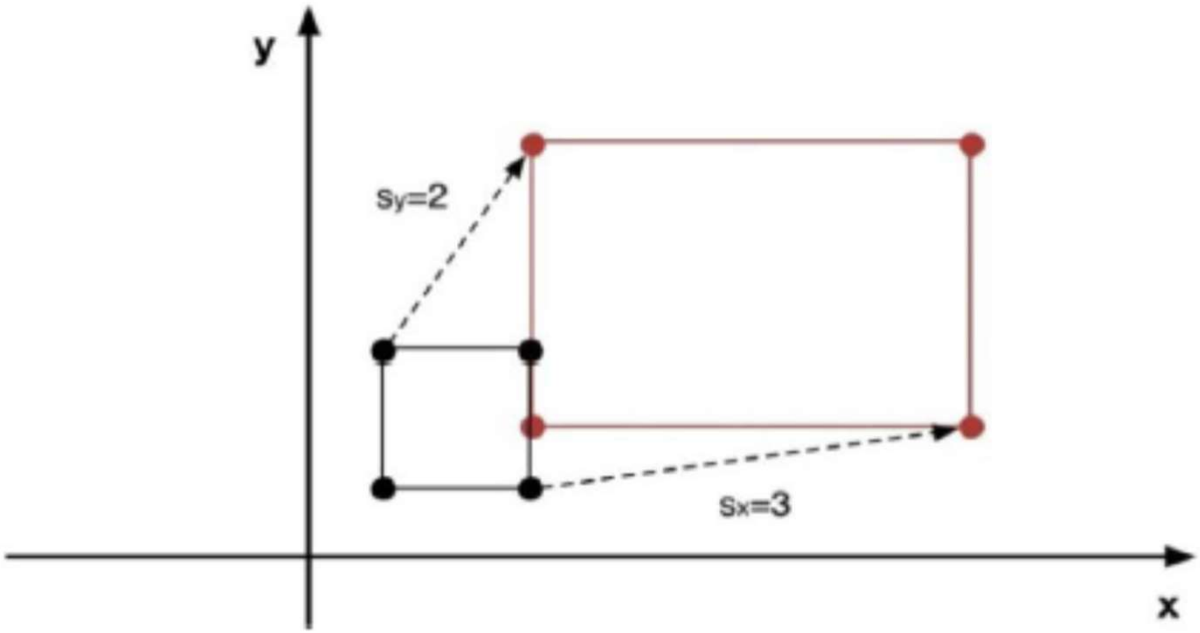
$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = s \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{p}_1 = s \cdot \mathbf{p}_1$$

- ✓ *Όταν ο συντελεστής κλιμάκωσης έχει τιμή ίση με τη μονάδα, τότε δεν υπάρχει αλλαγή κλίμακας, ενώ μιλάμε για μεγέθυνση ή σμίκρυνση όταν έχει τιμή μεγαλύτερη ή μικρότερη της μονάδας αντίστοιχα.*

Γραφικά Υπολογιστών

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων - Αλλαγή Κλίμακας

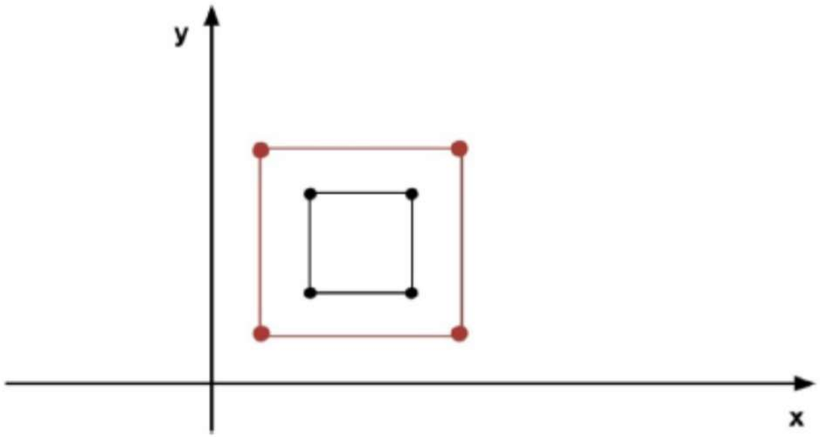
✓ *Στην Εικόνα παρουσιάζεται ένα παράδειγμα κλιμάκωσης ενός σχήματος σε 2D.*



Γραφικά Υπολογιστών

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων - Αλλαγή Κλίμακας

✓ *Η κλιμάκωση ως μετασχηματισμός πολλαπλασιάζει με ένα συντελεστή τις συντεταγμένες ενός αντικειμένου. Έστω τώρα το μαύρο τετράγωνο στο παρακάτω σχήμα, το οποίο θέλουμε να μετασχηματίσουμε ώστε να συμπίπτει με το κόκκινο τετράγωνο. Με μια πρώτη ματιά παρατηρούμε ότι το μέγεθος του αντικειμένου έχει διπλασιαστεί. Άρα ένας μετασχηματισμός ομοιόμορφης κλιμάκωσης κατά 2 S(2,2) ίσως να μας έδινε την απάντηση στο πρόβλημά μας. Δεν είναι όμως έτσι, διότι ο μετασχηματισμός εφαρμόζεται στις συντεταγμένες κάθε σημείου του αντικειμένου. Έτσι η παραπάνω κλιμάκωση αντί να επιφέρει το επιθυμητό αποτέλεσμα, θα φέρει το αποτέλεσμα της παρακάτω Εικόνας.*

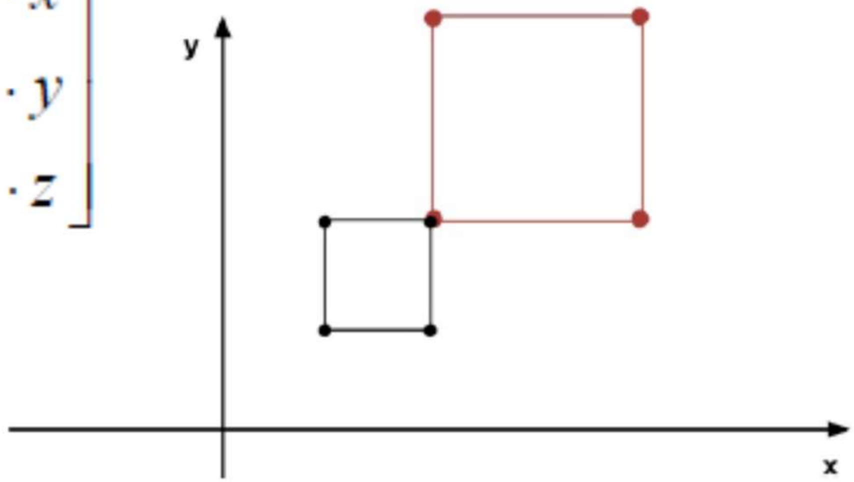


Γραφικά Υπολογιστών

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων - Αλλαγή Κλίμακας

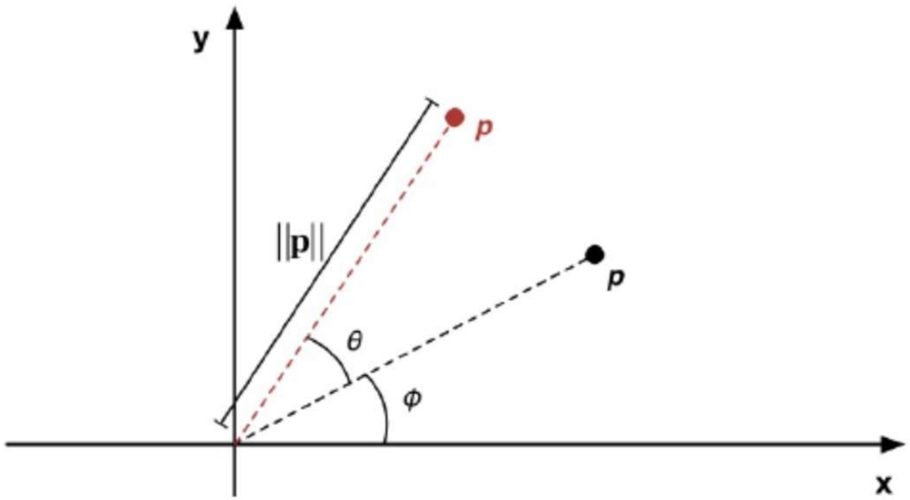
- *Για να μπορέσουμε τώρα να εφαρμόσουμε κλιμάκωση θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε σύνθετους μετασχηματισμούς. Πρέπει, δηλαδή, αρχικά να μεταφέρουμε το αντικείμενο στην αρχή των αξόνων, στη συνέχεια να εκτελέσουμε την επιθυμητή κλιμάκωση και τέλος να το επαναφέρουμε στην επιθυμητή θέση. Οι σύνθετοι μετασχηματισμοί θα αναλυθούν σε επόμενη παράγραφο. Ο μετασχηματισμός κλιμάκωσης γενικεύεται εύκολα στις τρεις διαστάσεις, όπως περιγράφει η παρακάτω σχέση:*

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{S}\cdot\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \\ s_z \cdot z \end{bmatrix}$$



Περιστροφή σε 2D

- ✓ *Η περιστροφή στις δύο διαστάσεις περιστρέφει ένα αντικείμενο γύρω από την αρχή των αξόνων. Σημαντική πληροφορία για την υλοποίηση του μετασχηματισμού περιστροφής στις δύο διαστάσεις είναι η γωνία περιστροφής ϑ. Ακόμα υιοθετούμε τη σύμβαση ότι θετική είναι μία περιστροφή κατά φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού. Έστω, λοιπόν, το σημείο p1=(x,y) το οποίο, όπως απεικονίζει η Εικόνα 3.5 πρέπει να περιστραφεί κατά ϑ μοίρες και να μετασχηματιστεί στο σημείο p2=(a,b).*



Περιστροφή κατά θ στις δύο διαστάσεις

Περιστροφή σε 2D

- ✓ *Παρατηρώντας την Εικόνα 3.5 και έχοντας υπόψη ότι κατά την περιστροφή το μήκος του διανύσματος Op παραμένει σταθερό, μπορούμε να εξάγουμε εύκολα τις παρακάτω σχέσεις:*

$$a = \|p\|\cos(\varphi+\theta) = \|p\|(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$b = \|p\|\sin(\varphi+\theta) = \|p\|(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta) = x\sin\theta + y\cos\theta$$

- ✓ *Η παραπάνω σχέση μπορεί να εκφραστεί και σε μορφή πίνακα ως εξής:*

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\theta)\cdot\mathbf{p}_1$$

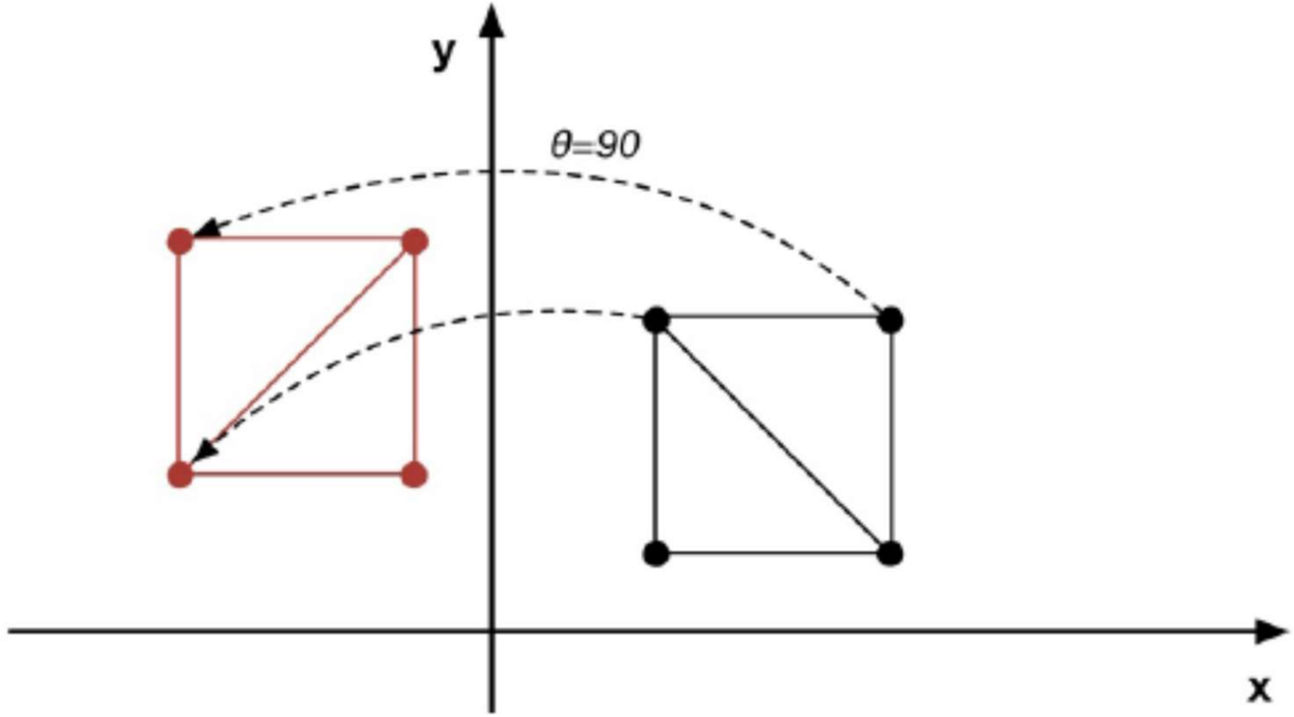
όπου R(ϑ) ο πίνακας περιστροφής:

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Γραφικά Υπολογιστών

Περιστροφή σε 2D

✓ *Η παρακάτω εικόνα παρουσιάζει ένα παράδειγμα 2D περιστροφής ενός αντικειμένου:*

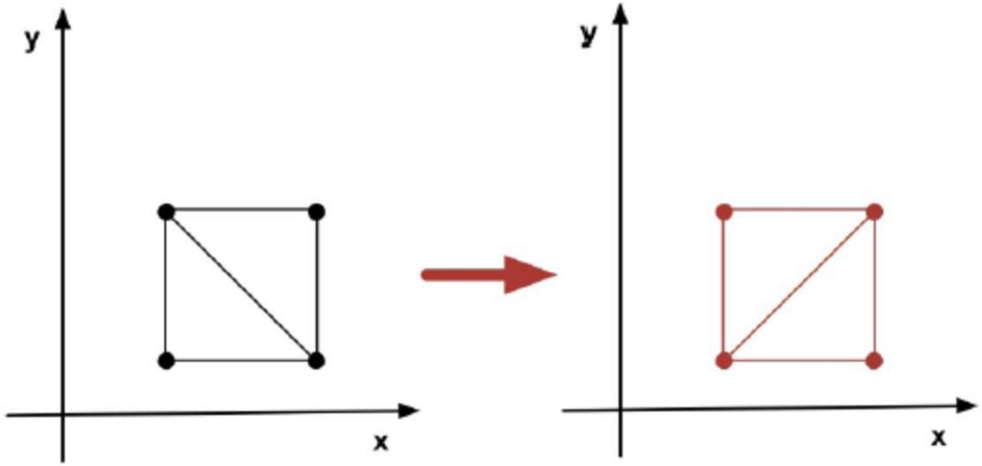


Περιστροφή αντικειμένου κατά θ στις δύο διαστάσεις

Γραφικά Υπολογιστών

Περιστροφή σε 2D

- ✓ *Όπως και η κλιμάκωση έτσι και η περιστροφή ως μετασχηματισμός επηρεάζει τις συντεταγμένες ενός αντικειμένου. Έστω τώρα το μαύρο τετράγωνο στο παρακάτω σχήμα, το οποίο θέλουμε να μετασχηματίσουμε στο κόκκινο τετράγωνο. Θέλουμε, δηλαδή, να εκτελέσουμε μία περιστροφή 90ο γύρω από το κέντρο βάρους του. Ένας μετασχηματισμός R(90) θα έδινε τη λύση στο πρόβλημά μας; Η απάντηση είναι όχι, διότι ο μετασχηματισμός εφαρμόζεται στις συντεταγμένες κάθε σημείου του αντικειμένου και η περιστροφή λαμβάνει χώρα γύρω από την αρχή των αξόνων. Έτσι, εφαρμόζοντας την παραπάνω περιστροφή αντί να πάρουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα, θα πάρουμε αντί αυτού το παρακάτω αποτέλεσμα:*



Για να μπορέσουμε τώρα να εφαρμόσουμε την περιστροφή πρέπει να χρησιμοποιήσουμε σύνθετους μετασχηματισμούς. Πρέπει, δηλαδή, αρχικά να μεταφέρουμε το αντικείμενο στην αρχή των αξόνων στη συνέχεια να εκτελέσουμε την επιθυμητή περιστροφή και τέλος να το επαναφέρουμε στην επιθυμητή θέση.

Περιστροφή σε 3D

- ✓ *Η σημαντικότερη θεμελιώδης διαφορά της περιστροφής σε 3D σε σχέση με τις 2D είναι ότι σε 3D δεν ορίζεται περιστροφή γύρω από σημείο, αλλά μπορεί να οριστεί περιστροφή γύρω από άξονα.*
- ✓ *Έτσι σημαντική πληροφορία για την υλοποίηση του μετασχηματισμού περιστροφής σε 3D είναι η γωνία περιστροφής ϑ και ο άξονας περιστροφής v.*
- ✓ *Για την περίπτωση περιστροφής γύρω από έναν από τους τρεις άξονες βάσης του συστήματος συντεταγμένων τα πράγματα είναι απλά.*
- ✓ *Θεωρώντας την περίπτωση της περιστροφής γύρω από τον άξονα z, τότε έχουμε πρακτικά μια περιστροφή δύο διαστάσεων, κατά την οποία αλλάζουν οι συντεταγμένες x και y, ενώ παραμένει σταθερή η z.*

Περιστροφή σε 3D

- ✓ *Αυτό μπορεί να μοντελοποιηθεί επεκτείνοντας τον 2x2 πίνακα περιστροφής σε πίνακα 3x3 με τη χρήση του μοναδιαίου πίνακα για την τρίτη διάσταση, όπως περιγράφει η παρακάτω σχέση:*

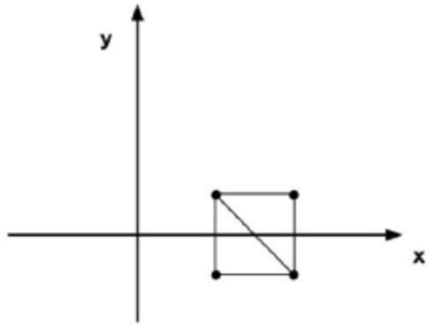
$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

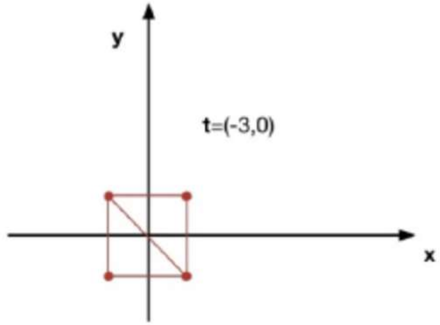
- ✓ *Κατά αναλογία μπορούν να οριστούν και οι πίνακες που εκτελούν περιστροφή κατά γωνία ϑ γύρω από τον άξονα των x και y αντίστοιχα:*

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

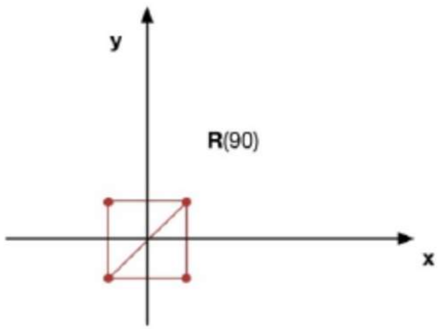
Σύνθετοι 2D Μετασχηματισμοί

- ✓ *Πρέπει αρχικά να υπενθυμίσουμε ότι εν γένει είναι σημαντική η σειρά με την οποία εφαρμόζονται οι μετασχηματισμοί. Στις παρακάτω εικόνες απεικονίζονται οι διαφορές στην εφαρμογή με διαφορετική σειρά ενός μετασχηματισμού μεταφοράς t(-3,0) και ενός μετασχηματισμού περιστροφής R(90).*





Μετασχηματισμός 1



Μετασχηματισμός 2

Εφαρμογή μετασχηματισμού μεταφοράς t(-3,0) και έπειτα μετασχηματισμού περιστροφής R(90)

Γραφικά Υπολογιστών

Σύνθετοι 2D Μετασχηματισμοί

- *Όταν ένας μετασχηματισμός εφαρμοστεί σε ένα σημείο μίας σκηνής τότε έχουμε ως αποτέλεσμα ένα νέο σημείο στη σκηνή. Στο αποτέλεσμα μπορούν να εφαρμοστούν στη συνέχεια επιπλέον μετασχηματισμοί. Για παράδειγμα έστω ένα αντικείμενο με 100 σημεία, το οποίο θέλουμε να κλιμακώσουμε με τον πίνακα S, και να περιστρέψουμε με τον πίνακα R. Δηλαδή, κάθε σημείο του αντικειμένου θέλουμε να μετασχηματιστεί ως εξής:*

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})$$

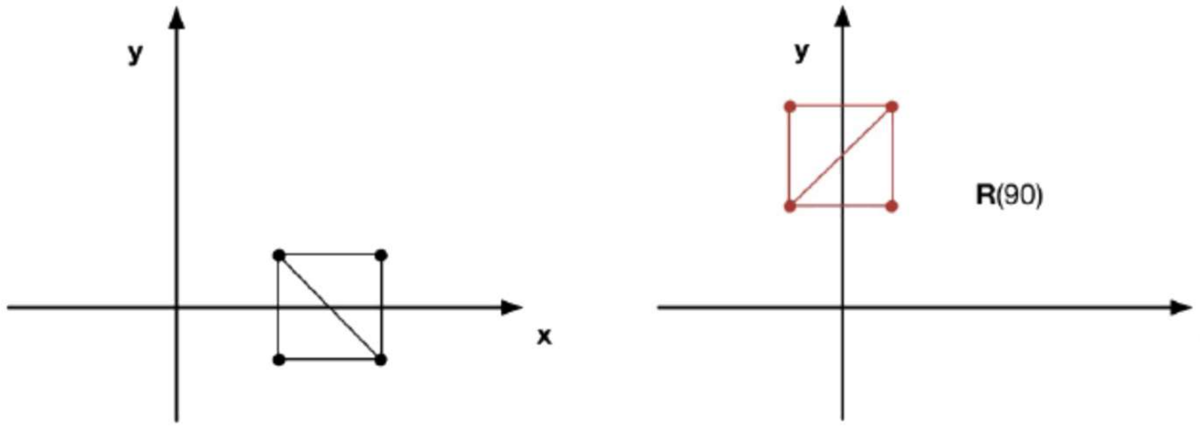
- *Η πράξη αυτή ισοδυναμεί με δύο πολλαπλασιασμούς πινάκων για κάθε σημείο, άρα για τα 100 σημεία έχουμε 200 πολλαπλασιασμούς πινάκων. Ωστόσο, αντί να πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα S με το σημείο p και στη συνέχεια το αποτέλεσμα με το R, μπορούμε να υπολογίσουμε ένα σύνθετο μετασχηματισμό ο οποίος να συμπεριλαμβάνει το R και το S σε έναν πίνακα και να πολλαπλασιάσουμε το αποτέλεσμα με όλα τα σημεία του αντικειμένου. Στην περίπτωση αυτή έχουμε 100 πολλαπλασιασμούς πινάκων συν 1 για τον υπολογισμό του σύνθετου μετασχηματισμού. Άρα έχουμε:*

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{p} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{p}$$

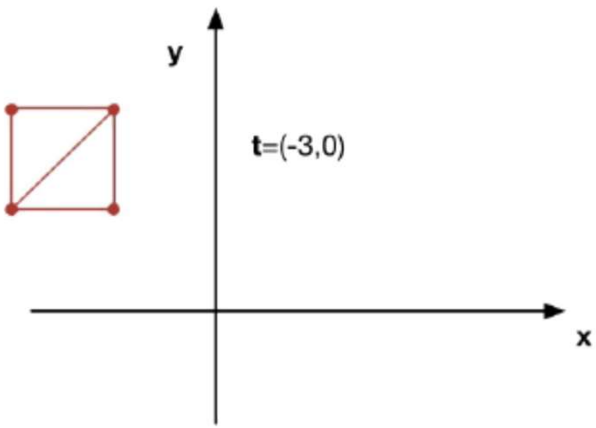
Γραφικά Υπολογιστών

Σύνθετοι 2D Μετασχηματισμοί

- ✓ *Εφαρμογή μετασχηματισμού περιστροφής R(90) και έπειτα μεταφοράς t(-3,0)*



Μετασχηματισμός 1



Μετασχηματισμός 2

Γραφικά Υπολογιστών

Σύνθετοι 2D Μετασχηματισμοί

- *Εδώ πρέπει να προσέξουμε ότι ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν έχει την αντιμεταθετική ιδιότητα, οπότε έχει σημασία η σειρά με την οποία πολλαπλασιάζονται οι πίνακες. Επομένως, όταν θέλουμε να εφαρμόσουμε διαδοχικά ένα σύνολο μετασχηματισμών M1, M2,…, Mn, πρέπει να υπολογίσουμε το σύνθετο πίνακα πολλαπλασιάζοντας με αντίστροφη φορά:*

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_n \cdot \ldots \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1$$

- *Τι γίνεται, όμως, όταν θέλουμε στο σύνθετο μετασχηματισμό μας να εφαρμόσουμε και μεταφορά; Στην περίπτωση αυτή, δυστυχώς, η μεταφορά δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των συντεταγμένων του σημείου, δηλαδή με την παρακάτω μορφή:*

$$x'_p = ax_p + by_p$$
$$y'_p = cx_p + dy_p$$

- *Η μεταφορά ας θυμηθούμε ότι απλώς προσθέτει μία ποσότητα σε κάθε συντεταγμένη:*

$$x'_p = x_p + t_x$$
$$y'_p = y_p + t_y$$

Ομογενείς Συντεταγμένες

- ✓ *Έστω τώρα ότι θέλουμε να εφαρμόσουμε μία αλλαγή συστήματος συντεταγμένων. Αυτό, συνήθως, απαιτεί μία περιστροφή και μία μεταφορά, ώστε να συμπέσουν οι άξονες. Άρα καταλήγουμε σε ένα μετασχηματισμό της παρακάτω μορφής:*

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}\mathbf{p} + \mathbf{t}$$

  όπου R είναι ο αντιστρέψιμος πίνακας περιστροφής και t το διάνυσμα μεταφοράς.
- ✓ *Τι γίνεται, όμως, όταν θέλουμε να επαναλάβουμε άλλον έναν όμοιο μετασχηματισμό με διαφορετικό πίνακα περιστροφής και διάνυσμα μεταφοράς; Αυτή η πολύ κοινή διεργασία στους γράφους σκηνής και στη σκελετική κίνηση, όπως θα περιγράψουμε σε επόμενα κεφάλαια, γίνεται ιδιαίτερα πολύπλοκη, όπως περιγράφεται στην παρακάτω σχέση:*

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}_2(\mathbf{R}_1\mathbf{p} + \mathbf{t}_1) + \mathbf{t}_2 = (\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1)\mathbf{p} + \mathbf{R}_2\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$$

- ✓ *Για n μετασχηματισμούς, η παραπάνω σχέση υποδεικνύει ότι πρέπει να αποθηκεύουμε τους συνδυασμένους πίνακες περιστροφής* $\mathbf{R}_n\mathbf{R}_{n-1}$ *αλλά και τους όρους μεταφοράς* $\mathbf{R}_n\mathbf{t}_{n-1}$ και $\mathbf{t}_n$.

Γραφικά Υπολογιστών

Ομογενείς Συντεταγμένες

- ✓ *Οι ομογενείς συντεταγμένες μας παρέχουν τη δυνατότητα με ένα έξυπνο τρόπο να παρακάμψουμε το παραπάνω πρόβλημα και προσθέτοντας μία ακόμα διάσταση να περιγράψουμε καθολικά όλους τους βασικούς μετασχηματισμούς με πίνακες (n+1)x(n+1), όπου n είναι η διάσταση του προβλήματος.*
- ✓ *Ένα σημείο δύο διαστάσεων αναπαρίσταται, πλέον, με ένα διάνυσμα τριών στοιχείων. Η τρίτη συντεταγμένη w ονομάζεται ομογενής και θέτουμε ίση με 1. Άρα η ομογενής αναπαράσταση του σημείου p θα είναι:*

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}^T$$

- ✓ *Για ένα δισδιάστατο πρόβλημα μπορούμε να ορίσουμε τον 3x3 ομογενή πίνακα μετασχηματισμού M, ο οποίος συμπεριλαμβάνει και την περιστροφή αλλά και τη μετατόπιση ως εξής:*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Γραφικά Υπολογιστών

Ομογενείς Συντεταγμένες

- ✓ *Ο πίνακας Μ αν πολλαπλασιαστεί με ένα σημείο p, το μετασχηματίζει ακριβώς και έχει ως αποτέλεσμα ένα σημείο με w συντεταγμένη ίση με 1. Όπως θα δούμε στη συνέχεια και στους μετασχηματισμούς προβολής, δεν «αφήνουν» όλοι η μετασχηματισμοί ανεπηρέαστο το w. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να ανακτήσουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου διαιρώντας όλες τις συντεταγμένες με το w. Δηλαδή:*

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{p}_{cartesian} \begin{bmatrix} a/w \\ b/w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ομογενής 2D Κλιμάκωση

- ✓ *Με τις ομογενείς συντεταγμένες μπορούμε να υπολογίσουμε ένα μετασχηματισμό κλιμάκωσης ενός ζεύγους συντεταγμένων βάσει των παρακάτω εξισώσεων:*

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- ✓ *Οπότε η ομογενής κλιμάκωση στις δύο διαστάσεις περιγράφεται από τον παρακάτω πίνακα:*

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου sx και sy οι συντελεστές κλιμάκωσης κατά τον άξονα των x και y αντίστοιχα.

Γραφικά Υπολογιστών

Ομογενής 2D Περιστροφή

- ✓ *Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να επεκταθεί και ο μετασχηματισμός περιστροφής, ώστε να εφαρμόζεται πάνω σε σημεία τα οποία αναπαρίστανται με ομογενείς συντεταγμένες. Για την περιστροφή ενός σημείου μπορεί να χρησιμοποιηθεί η παρακάτω σχέση:*

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{p}_1$$

- ✓ *Οπότε η ομογενής περιστροφής στις δύο διαστάσεις περιγράφεται από τον παρακάτω πίνακα, όπου ϑ είναι η γωνία περιστροφής γύρω από την αρχή των αξόνων.*

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Γραφικά Υπολογιστών

Ομογενής 2D Μεταφορά

- ✓ *Ένα από τα προβλήματα τα οποία λύνουν οι ομογενείς συντεταγμένες είναι η δυνατότητα έκφρασης της μεταφοράς ως γραμμικού συνδυασμού των συντεταγμένων εισόδου, δηλαδή με τη χρήση ενός πίνακα 3x3, αντίστοιχου με αυτόν της περιστροφής και της κλιμάκωσης. Αυτό επιτυγχάνεται βάσει της συντεταγμένης w των ομογενών συντεταγμένων, η οποία έχει την τιμή 1 για κάθε σημείο (x, y, w) όπου τα x, y αντιστοιχούν σε σημεία του 2D κόσμου (αλλιώς θα αντιστοιχούσαν οι συντεταγμένες x/w και y/w σε σημεία του 2D κόσμου) μπορούμε να εκφράσουμε τη μεταφορά ως γραμμικό συνδυασμό της εισόδου ως:*

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{p}_1$$

- ✓ *Οπότε η ομογενής μεταφορά στις δύο διαστάσεις περιγράφεται από τον παρακάτω πίνακα όπου tx και ty είναι η μετατόπιση ως προς τον άξονα των x και y αντίστοιχα.*

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Γραφικά Υπολογιστών

Ομογενής 2D Σύνθετοι Μετασχηματισμοί

- ✓ *Πλέον, όλοι οι βασικοί μετασχηματισμοί μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικός συνδυασμός των ομογενών συντεταγμένων του σημείου, δηλαδή με την παρακάτω μορφή:*

$$x'_p = ax_p + by_p + cw_p$$

$$y'_p = dx_p + ey_p + fw_p$$

$$w'_p = gx_p + hy_p + iw_p$$

- ✓ *Οπότε, όταν θέλουμε να εφαρμόσουμε διαδοχικά ένα σύνολο μετασχηματισμών M1, M2,…, Mn, συμπεριλαμβανομένης της μεταφοράς, πρέπει να υπολογίσουμε το σύνθετο πίνακα πολλαπλασιάζοντας με αντίστροφη φορά:*

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_n \cdot \ldots \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1$$

Ομογενής 3D Κλιμάκωση

- ✓ *Με τις ομογενείς συντεταγμένες μπορούμε να υπολογίσουμε ένα μετασχηματισμό κλιμάκωσης στις τρεις χωρικές διαστάσεων βάσει των παρακάτω εξισώσεων:*

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{S}\cdot\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \\ s_z \cdot z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- ✓ *Οπότε η ομογενής κλιμάκωση στις τρείς διαστάσεις περιγράφεται από τον παρακάτω πίνακα:*

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου sx, sy και sz οι συντελεστές κλιμάκωσης κατά τον άξονα των x, y και z.

Γραφικά Υπολογιστών

Ομογενής 3D Κλιμάκωση

- ✓ *Πολλές φορές είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε και τους αντίστροφους μετασχηματισμούς, όταν για παράδειγμα θέλουμε να αναιρέσουμε μία κίνηση σε μία προσομοίωση. Σε γενικές γραμμές ο αντίστροφος M-1 ενός μετασχηματισμού M είναι ο αντίστροφος του πίνακα M, οπότε πρέπει να ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:*

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I}$$

- ✓ *Για την περίπτωση της κλιμάκωσης, ο αντίστροφος μετασχηματισμός μιας κλιμάκωσης (sx, sy, sz) προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα:*

$$\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}, \frac{1}{s_z}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Γραφικά Υπολογιστών

Ομογενής 3D Μεταφορά

- *Με τις ομογενείς συντεταγμένες μπορούμε να υπολογίσουμε ένα μετασχηματισμό μεταφοράς στις τρεις χωρικές διαστάσεων βάσει των παρακάτω εξισώσεων:*

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{p}_1$$

- *Οπότε η ομογενής μεταφορά στις δύο διαστάσεις περιγράφεται από τον παρακάτω πίνακα, όπου tx, ty και tz είναι η μετατόπιση ως προς τον άξονα των x και y αντίστοιχα.*

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Γραφικά Υπολογιστών

Ομογενής 3D Μεταφορά

- ✓ *Για την περίπτωση της μεταφοράς ο αντίστροφος μετασχηματισμός μίας μετατόπισης (tx, ty, tz) προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα:*

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}\left(-t_x, -t_y, -t_z\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & 0 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 & -t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Γραφικά Υπολογιστών

Ομογενής 3D Περιστροφή

- ✓ *Με τις ομογενείς συντεταγμένες μπορούμε να υπολογίσουμε ένα μετασχηματισμό περιστροφής κατά γωνία ϑ, γύρω από έναν από τους άξονες βάσης. Θεωρώντας την περίπτωση της περιστροφής γύρω από τον άξονα z, μπορούμε να υπολογίσουμε την περιστροφή ενός σημείου ως εξής:*

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_z(\theta)\cdot\mathbf{p}_1$$

- ✓ *Οπότε ο πίνακας ομογενούς περιστροφής γύρω από τον άξονα z έχει ως εξής:*

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ομογενής 3D Περιστροφή

- *Κατά αναλογία μπορούν να οριστούν και οι πίνακες που εκτελούν περιστροφή κατά γωνία ϑ, γύρω από τον άξονα των x και y αντίστοιχα:*

$$\mathbf{R}_x(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- *Για την περίπτωση της περιστροφής ο αντίστροφος μετασχηματισμός προκύπτει, θέτοντας όπου ϑ το –ϑ. Οπότε οι αντίστροφοι πίνακες περιστροφής είναι οι εξής:*

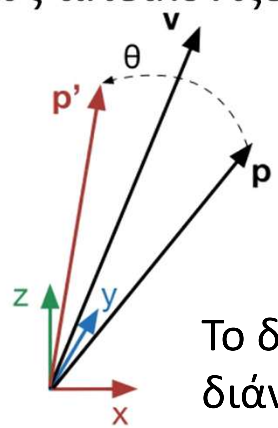
$$\mathbf{R}_x^{-1}=\mathbf{R}_x(-\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_y^{-1}=\mathbf{R}_y(-\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z^{-1}=\mathbf{R}_z(-\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \{\text{Εξ. } 3.42\}$$

Γραφικά Υπολογιστών

Περιστροφή Γύρω από Τυχαίο Άξονα

- ✓ *Ο υπολογισμός μίας τυχαίας περιστροφής στις τρεις διαστάσεις είναι ένα αρκετά περίπλοκο πρόβλημα. Εάν κανείς θέλει να συνδυάσει τρεις περιστροφές γύρω από τους άξονες βάσης για να συνθέσει μία τυχαία περιστροφή, πρέπει να είναι ιδιαίτερα προσεκτικός και να λάβει υπόψη ότι οι σύνθετοι μετασχηματισμοί δεν έχουν την αντιμεταθετική ιδιότητα. Δηλαδή, αν εκτελέσει κανείς μία περιστροφή γύρω από τον άξονα των x και μετά μία περιστροφή γύρω από τον άξονα των z, δε θα καταλήξει στο ίδιο αποτέλεσμα που θα κατέληγε αν εκτελούσε τους μετασχηματισμούς με αντίστροφη σειρά.*
- ✓ *Έστω ότι έχουμε το διάνυσμα p, το οποίο θέλουμε να περιστρέψουμε γύρω από το μοναδιαίο διάνυσμα (άξονα) ν, όπως απεικονίζεται στην παρακάτω εικόνα:*

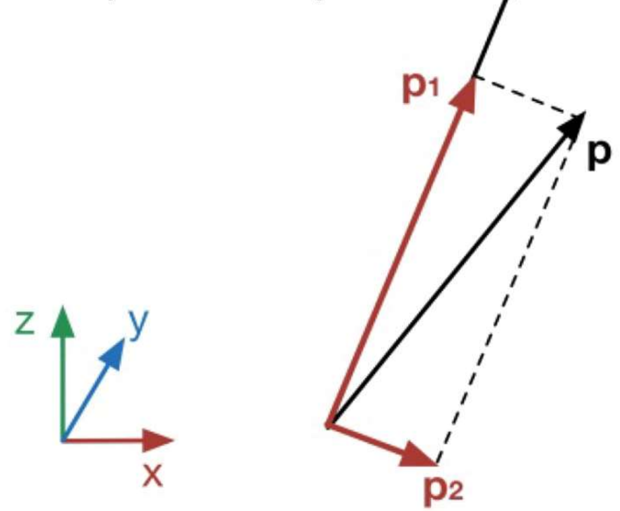


Το διάνυσμα p περιστρέφεται γύρω από το διάνυσμα ν κατά θ και καταλήγει στο p’

Γραφικά Υπολογιστών

Περιστροφή Γύρω από Τυχαίο Άξονα

- ✓ *Το διάνυσμα p μπορεί να αποσυντεθεί σε δύο συνιστώσες: την p1 παράλληλη με το v και την κάθετη σε αυτό p2.*



Το διάνυσμα p μπορεί να αποσυντεθεί στην παράλληλη ως προς το v συνιστώσα p1 και στην κάθετη p2

- ✓ *Δεδομένου ότι το v είναι μοναδιαίο, οι δύο αυτές συνιστώσες προκύπτουν από τις παρακάτω σχέσεις:*

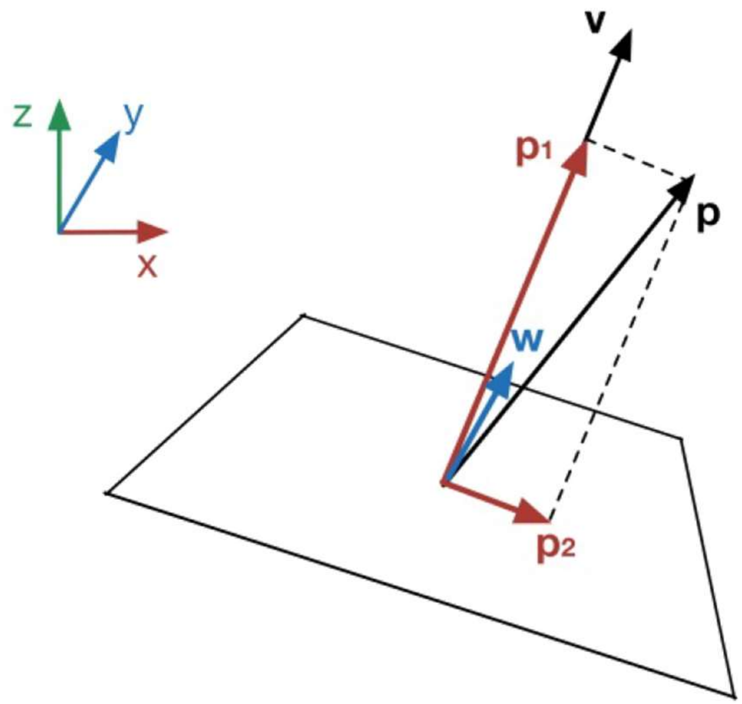
$$\mathbf{p}_1 = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$$

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$$

Γραφικά Υπολογιστών

Περιστροφή Γύρω από Τυχαίο Άξονα

- ✓ *Τώρα είναι προφανές ότι η παράλληλη συνιστώσα δεν περιστρέφεται, οπότε το πρόβλημα περιορίζεται στον υπολογισμό της περιστροφής του p2 γύρω από το v. Στη συνέχεια το αποτέλεσμα θα προστεθεί στο p1.*
- ✓ *Ο υπολογισμός της περιστροφής υπολογίζεται, όπως απεικονίζεται και στο παρακάτω σχήμα, με τη περιστροφή του p2 σε ένα επίπεδο κάθετο στο v.*



Η περιστροφή του p2 γίνεται σε επίπεδο κάθετο στο v. Ο υπολογισμός του διανύσματος w το οποίο βρίσκεται πάνω στο επίπεδο και είναι κάθετο στο p2, βοηθάει στον τριγωνομετρικό υπολογισμό της περιστροφής.

Εάν γνωρίζαμε το διάνυσμα w του σχήματος, τότε θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε γνωστές τριγωνομετρικές σχέσεις, ώστε να υπολογίσουμε την περιστροφή:

$$\mathbf{p}_2' = \mathbf{p}_2 \cos\theta + \mathbf{w} \sin\theta$$

Γραφικά Υπολογιστών

Περιστροφή Γύρω από Τυχαίο Άξονα

- *Με μια προσεκτικότερη ματιά της παραπάνω εικόνας, βλέπουμε ότι το διάνυσμα w που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι κάθετο στο επίπεδο που σχηματίζεται από το p και το v και μπορεί να υπολογιστεί από το εξωτερικό τους γινόμενο:* $\mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{p}$
- *Επίσης, παρατηρούμε ότι τα w και p2 έχουν ίδιο πλάτος. Άρα το περιστραμμένο διάνυσμα προκύπτει από την παρακάτω σχέση:*

$$\mathbf{p}_2' = \left[\mathbf{p} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{p})\mathbf{v}\right]\cos\theta + (\mathbf{v} \times \mathbf{p})\sin\theta$$

- *Άρα τελικά το περιστραμμένο διάνυσμα είναι:*

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2' = \mathbf{p}\cos\theta + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{p})\mathbf{v}(1-\cos\theta) + (\mathbf{v} \times \mathbf{p})\sin\theta$$

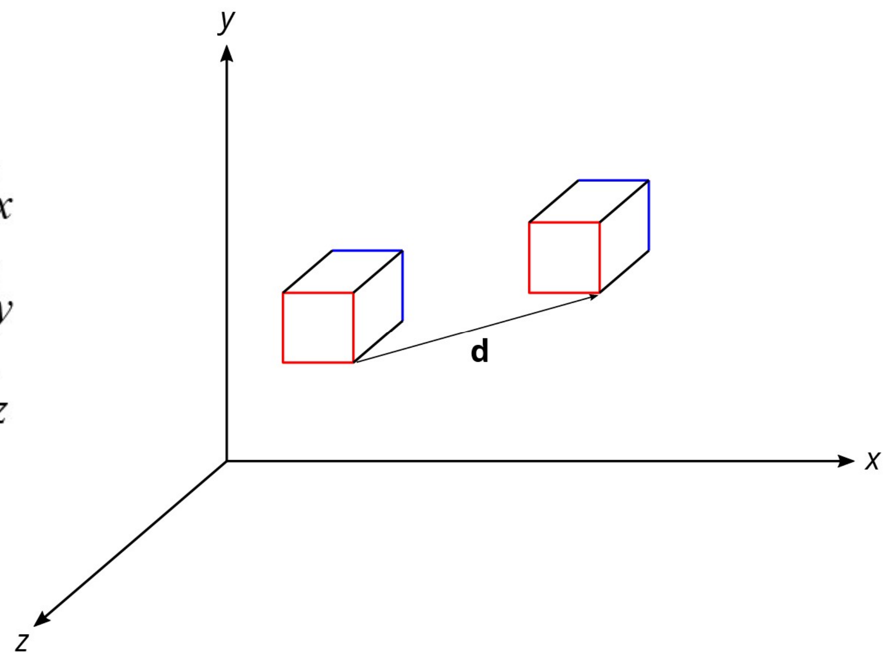
και κάνοντας τις πράξεις προκύπτει ο παρακάτω πίνακας περιστροφής:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{v}}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta + (1-\cos\theta)v_x^2 & (1-\cos\theta)v_x v_y - \sin\theta \cdot v_z & (1-\cos\theta)v_x v_z + \sin\theta \cdot v_y \\ (1-\cos\theta)v_x v_y + \sin\theta \cdot v_z & \cos\theta + (1-\cos\theta)v_y^2 & (1-\cos\theta)v_y v_z - \sin\theta \cdot v_x \\ (1-\cos\theta)v_x v_z - \sin\theta \cdot v_y & (1-\cos\theta)v_y v_z + \sin\theta \cdot v_x & \cos\theta + (1-\cos\theta)v_z^2 \end{bmatrix}$$

Συνοψίζοντας

- ✓ *Βασικοί μετασχηματισμοί σε 3D*
  - ✓ *Η **μεταφορά (translation)** ενός σημείου p = (x, y, z) αφορά στην μετακίνησή του κατά συγκεκριμένη απόσταση προς συγκεκριμένη κατεύθυνση.*
  - ✓ *Αυτά τα χαρακτηριστικά της μεταφοράς μπορούν να εκφραστούν ως ένα διάνυσμα $d = (d_x, d_y, d_z)$.*
  - ✓ *Η θέση $p' = (x', y', z')$ του σημείου μετά την μεταφορά του θα είναι:*

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{d}, \quad \text{δηλαδή} \quad \begin{aligned} x' &= x + d_x \\ y' &= y + d_y \\ z' &= z + d_z \end{aligned}$$



Γραφικά Υπολογιστών

Συνοψίζοντας

- ✓ *Βασικοί μετασχηματισμοί σε 3D*
  - ✓ *Η **αλλαγή κλίμακας (scaling)** ενός σημείου p αφορά απλώς τον πολλαπλασιασμό των συντεταγμένων του με κάποιους συντελεστές s_x , s_y , s_z κατά τους τρεις άξονες αντίστοιχα.*
  - ✓ *Η θέση p′ = (x′ , y′ , z′) του σημείου μετά την μεταφορά του θα έχει συντεταγμένες:*

$$x' = s_x x$$

$$y' = s_y y$$

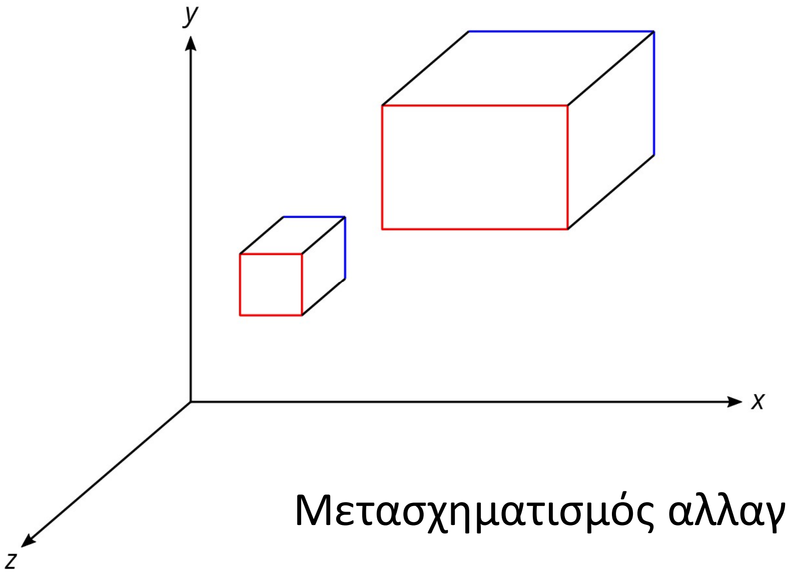
$$z' = s_z z$$

  - ✓ *Ο μετασχηματισμός αλλαγής κλίμακας σε ένα σχήμα, εφαρμόζεται με τον μετασχηματισμό στα σημεία που αποτελούν τις κορυφές του σχήματος.*
  - ✓ *Αν ένας συντελεστής αλλαγής κλίμακας είναι μεγαλύτερος του 1, τότε προκύπτει μεγέθυνση του σχήματος κατά την αντίστοιχη διάσταση, ενώ αν είναι μεταξύ 0 και 1 προκύπτει σμίκρυνση του σχήματος.*

Γραφικά Υπολογιστών

Συνοψίζοντας

- ✓ *Βασικοί μετασχηματισμοί σε 3D*
  - ✓ *Στην* ***αλλαγή κλίμακας (scaling)*** *παρατηρούμε ότι, επειδή έχουμε απλώς έναν πολλαπλασιασμό των συντεταγμένων, αυτός ο βασικός μετασχηματισμός επιφέρει, ταυτόχρονα με την αλλαγή του μεγέθους του σχήματος και μετακίνησή του ανάλογη με τον αντίστοιχο συντελεστή.*
  - ✓ *Αυτό σπάνια είναι το επιθυμητό καθώς θέλουμε να διατηρήσουμε κάποιο σημείο του αντικειμένου σταθερό (π.χ. ένα άκρο ή το κέντρο του).*

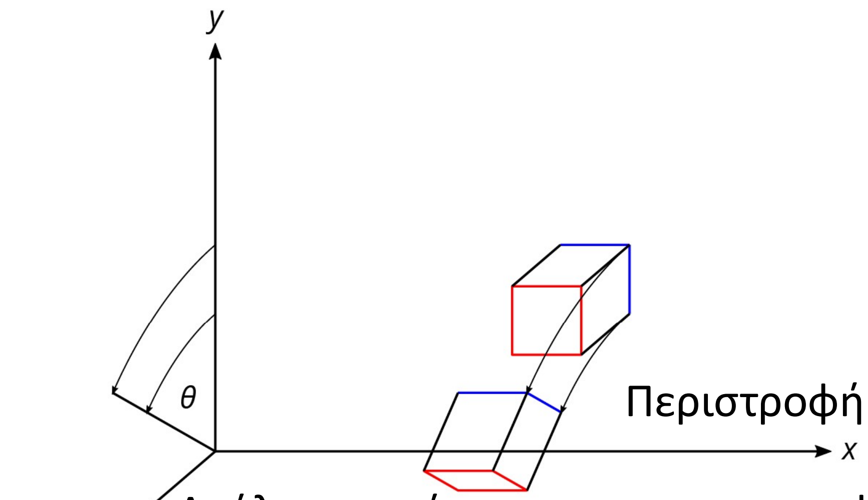


Μετασχηματισμός αλλαγής κλίμακας (κατά $s_x = 3$, $s_y = 2$, $s_z = 2$)

Γραφικά Υπολογιστών

Συνοψίζοντας

- ✓ *Βασικοί μετασχηματισμοί σε 3D*
  - ✓ *Η **περιστροφή (rotation)** ενός σημείου **p** αφορά την περιστροφή του γύρω από έναν άξονα και στην πιο βασική μορφή γύρω από έναν από τους άξονες συντεταγμένων.*
  - ✓ *Για παράδειγμα, με την περιστροφή κατά γωνία **ϑ** γύρω από τον άξονα **x**, οι συντεταγμένες ενός σημείου **p** διαμορφώνονται ως εξής:*



$$x' = x$$
$$y' = y\cos\theta - z\sin\theta$$
$$z' = y\sin\theta + z\cos\theta$$

Περιστροφή γύρω από τον άξονα **x** κατά θ = 45◦

Ανάλογα ισχύουν για τις περιστροφές γύρω από τους άξονες **y** και **z**, δηλαδή η αντίστοιχη συνταγμένη παραμένει αναλλοίωτη και οι άλλες δύο διαμορφώνονται με παρόμοιους τύπους.

Γραφικά Υπολογιστών

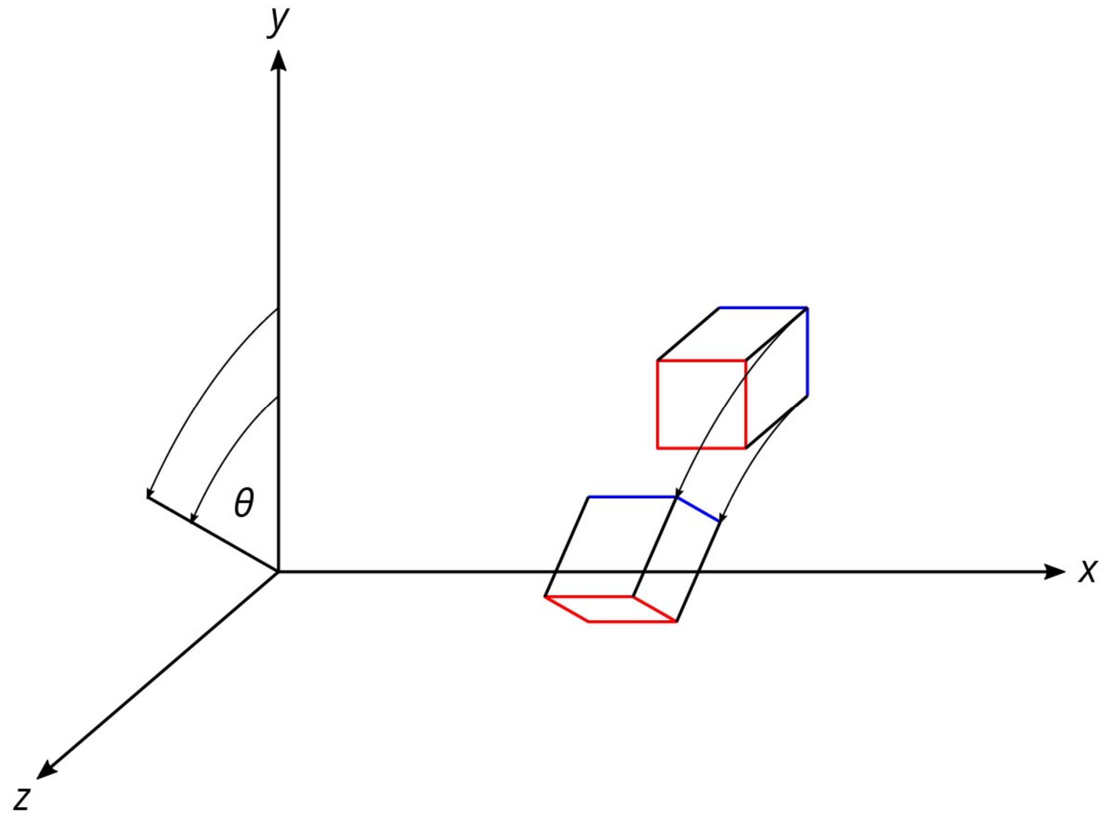
Συνοψίζοντας

- ✓ *Βασικοί μετασχηματισμοί σε 3D*
  - ✓ *Στους τύπους της περιστροφής είναι σημαντικό να λαμβάνεται υπόψιν σωστά η φορά της γωνίας ϑ.*
  - ✓ *Σε ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων, θετική γωνία θεωρείται αυτή που περιστρέφει κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, αν κοιτάζουμε κατά τη φορά του άξονα περιστροφής.*
  - ✓ *Εναλλακτικά, χρησιμοποιούμε το δεξί χέρι μας για να «αγκαλιάσουμε» τον άξονα περιστροφής, με τον ανοικτό αντίχειρα να δείχνει κατά τη φορά του άξονα, οπότε η φορά που δείχνουν τα υπόλοιπα δάκτυλα είναι η θετική.*
  - ✓ *Σε ένα αριστερόστροφο σύστημα ισχύουν τα αντίστροφα και η θετική φορά προκύπτει από το αριστερό χέρι.*

Γραφικά Υπολογιστών

Συνοψίζοντας

- ✓ *Βασικοί μετασχηματισμοί σε 3D*
  - ✓ *Στην εικόνα το σύστημα συντεταγμένων είναι δεξιόστροφο, επομένως η περιστροφή που απεικονίζεται γίνεται κατά θετική γωνία ϑ.*

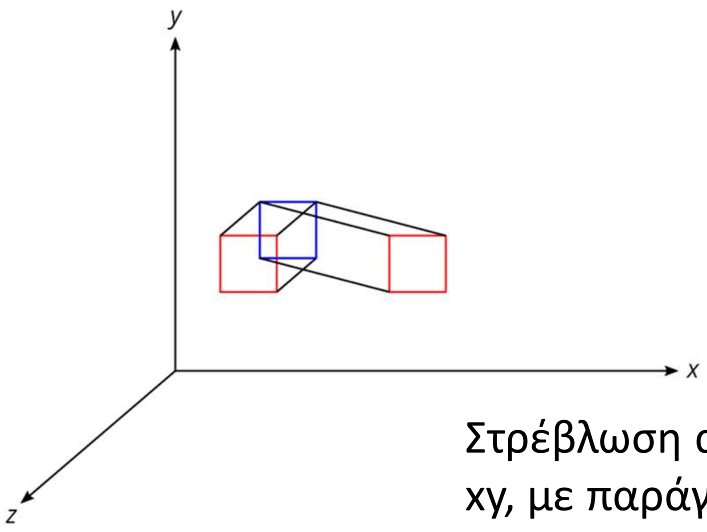


Γραφικά Υπολογιστών

Συνοψίζοντας

- ✓ *Βασικοί μετασχηματισμοί σε 3D*
  - ✓ *Η **στρέβλωση (shearing)** «στρεβλώνει» (πλαγιάζει) αντικείμενα ως προς ένα από τα επίπεδα που σχηματίζουν οι άξονες συντεταγμένων.*
  - ✓ *Για παράδειγμα, θεωρούμε τη στρέβλωση ενός σημείου **p** ως προς το επίπεδο **xy**.*
  - ✓ *Η στρέβλωση αυτή ορίζεται από δύο παράγοντες, έστω sh_x και sh_y.*
  - ✓ *Οι συντεταγμένες του σημείου μετά από αυτή τη στρέβλωση διαμορφώνονται ως εξής:*

$$x' = x + sh_x z$$
$$y' = y + sh_y z$$
$$z' = z$$

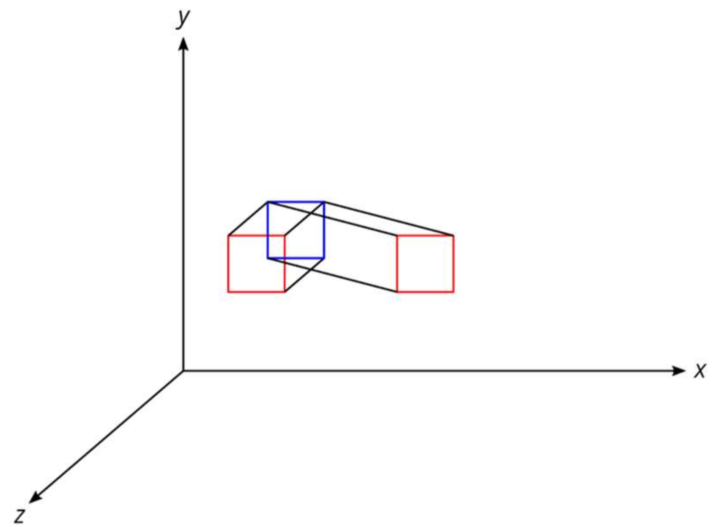


Στρέβλωση αντικειμένου ως προς το επίπεδο xy, με παράγοντες $sh_x = 3$, $sh_y = 0$)

Γραφικά Υπολογιστών

Συνοψίζοντας

- ✓ *Βασικοί μετασχηματισμοί σε 3D*
  - ✓ *Στη **στρέβλωση** παρατηρούμε ότι η συντεταγμένη **x** του σημείου αυξάνεται κατά το γινόμενο της συντεταγμένης **z** επί τον αντίστοιχο παράγοντα στρέβλωσης (και αντίστοιχα η **y**), επομένως όσο πιο μακριά (στον άξονα **z**) βρίσκεται το σημείο, τόσο περισσότερο θα απομακρυνθεί.*
  - ✓ *Η στρέβλωση χρησιμοποιείται σπανιότερα από τη μεταφορά, την αλλαγή κλίμακας και την περιστροφή, όμως περιλαμβάνεται στους βασικούς μετασχηματισμούς καθώς δεν μπορεί να προκύψει από τους υπόλοιπους.*



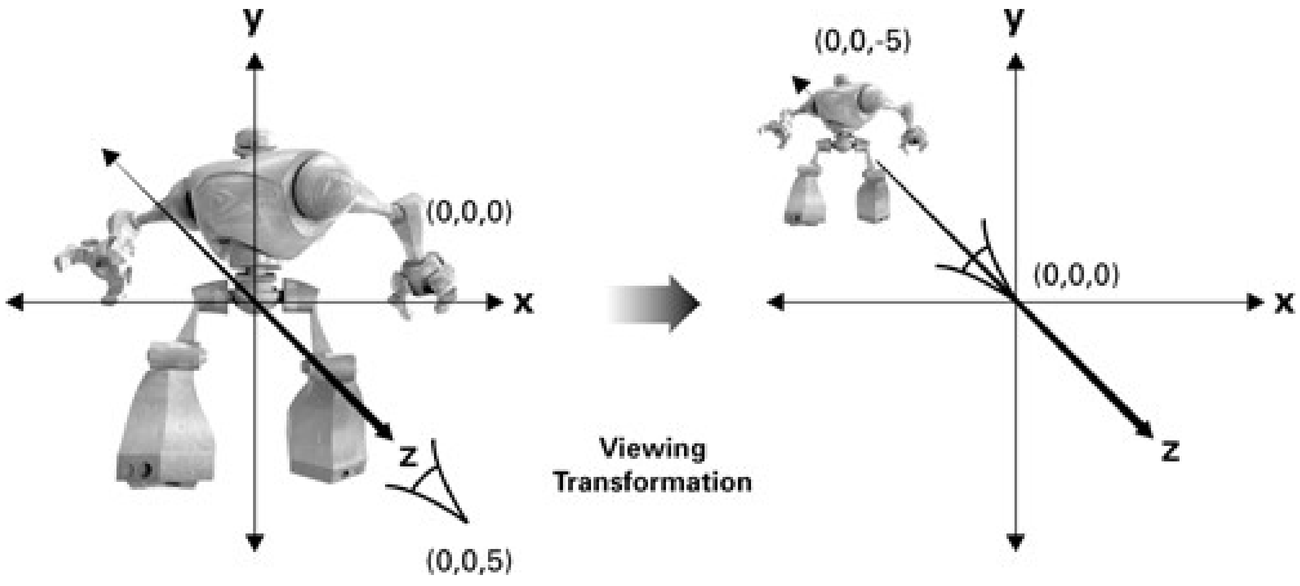
Συνοψίζοντας

- ✓ *Ομογενείς συντεταγμένες*
  - ✓ *Ένα σημείο **p** με καρτεσιανές συντεταγμένες $[x, y, z]^T$ έχει ομογενείς συντεταγμένες τέσσερις αριθμούς της μορφής $[xk, yk, zk, k]^T$ για οποιοδήποτε $k \neq 0$.*
  - ✓ *Για παράδειγμα, το σημείο $[1, 3, 5]^T$ έχει ομογενείς συντεταγμένες $[1, 3, 5, 1]^T$, $[2, 6, 10, 2]^T$, $[3, 9, 15, 3]^T$ κ.ο.κ. — όλες αυτές αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο.*
  - ✓ *Αντίστροφα, αν δίνεται ένα σημείο σε ομογενείς συντεταγμένες $[a, b, c, w]^T$ (πάντα με $w \neq 0$), αυτό αντιστοιχεί στο σημείο με καρτεσιανές συντεταγμένες $[a=w, b=w, c=w]^T$.*
  - ✓ *Από όλες τις παραστάσεις ενός σημείου σε ομογενείς συντεταγμένες, πιο εύχρηστη είναι αυτή στην οποία η επιπλέον συντεταγμένη είναι **1:p**=$[x, y, z]^T = [x, y, z, 1]^T$. Αυτή καλείται βασική παράσταση του **p** σε ομογενείς συντεταγμένες.*
  - ✓ *Ομογενείς συντεταγμένες της μορφής $[x, y, z, 0]$ αντιπροσωπεύουν το διάνυσμα $[x, y, z]^T$ και όχι το σημείο με αυτές τις συντεταγμένες.*

Γραφικά Υπολογιστών

Συνοψίζοντας

- ✓ *Πίνακες μετασχηματισμών*
  - ✓ *Χρησιμοποιώντας ομογενείς συντεταγμένες για τα 3D σημεία, είναι δυνατό καθένας από τους βασικούς μετασχηματισμούς να αναπαρασταθεί με έναν πίνακα 4x4 έτσι ώστε να εφαρμόζεται σε ένα σημείο πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα αυτό με τον πίνακα-στήλη των ομογενών συντεταγμένων του σημείου.*



Συνοψίζοντας

- ✓ *Πίνακες μετασχηματισμών*
  - ✓ *Οι πίνακες αυτοί είναι οι ακόλουθοι:*

• **Μεταφορά** κατά $\mathbf{d} = [d_x, d_y, d_z]^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{T}(\mathbf{d}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• **Αλλαγή κλίμακας** κατά s_x, s_y, s_z:

$$\mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Συνοψίζοντας

- ✓ *Πίνακες μετασχηματισμών*
  - ✓ *Οι πίνακες αυτοί είναι οι ακόλουθοι:*
    - **Περιστροφή** κατά γωνία θ γύρω από τους βασικούς άξονες:

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Γραφικά Υπολογιστών

Συνοψίζοντας

✓ *Πίνακες μετασχηματισμών*

✓ *Οι πίνακες αυτοί είναι οι ακόλουθοι:*

- **Στρέβλωση** ως προς τα βασικά επίπεδα xy, xz και yz κατά παράγοντες sh_x, sh_y, sh_z κατά περίπτωση:

$$\mathbf{SH}_{xy}(sh_x, sh_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & sh_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{SH}_{xz}(sh_x, sh_z) = \begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & sh_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{SH}_{yz}(sh_y, sh_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ sh_y & 1 & 0 & 0 \\ sh_z & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Γραφικά Υπολογιστών

Συνοψίζοντας

- ✓ *Πίνακες μετασχηματισμών*
  - ✓ *Οι πίνακες αυτοί είναι οι ακόλουθοι:*

Έτσι αν $\mathbf{M}$ είναι ένας από αυτούς τους πίνακες και $\mathbf{p} = [x, y, z, 1]^{\mathrm{T}}$ ένα σημείο, η θέση του μετά την εφαρμογή του μετασχηματισμού θα είναι:

$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{p}$$

Για παράδειγμα, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι για τη μεταφορά ισχύει

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\mathbf{d}) \cdot \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ z + d_z \\ 1 \end{bmatrix},$$

Γραφικά Υπολογιστών

Βιβλιογραφία

✓ *Σ. Καλαφατούδη, "Γραφικά με Υπολογιστή," Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, 1991.*
✓ *Α. Στυλιάδη, "Γραφικά με Η/Υ," Εκδόσεις Ζήτη, 1999.*
✓ *Θ. Θεοχάρης, Α. Μπέμ, "Γραφικά: Αρχές και Αλγόριθμοι," Εκδόσεις Συμμετρία, 1999.*
✓ *Γ. Παρασχάκη, Μ. Παπαδοπούλου, Π. Πατιάς, "Σχεδίαση με Η/Υ," Εκδόσεις Ζήτη, 1999.*
✓ *J. D. Foley, A. van Dam, S. K. Feiner, J. F. Hughes, R. L. Phillips, "Introduction to Computer Graphics, "Addison Wesley, 1994.*
✓ *Κ. Μουστάκας Ι. Παλιόκας Α. Τσακίρης Δ. Τζοβάρας, (2015), "Γραφικά και Εικονική Πραγματικότητα", ISBN: 978-960-603-255-4, www.kallipos.gr*
✓ Λαζαρίνης, Φ, (2015), "Πολυμέσα", ISBN: 978-960-603-141-0, *www.kallipos.gr*
✓ *Γεώργιος Λέπουρας, Αγγελική Αντωνίου, Νίκος Πλαιής, Δημήτρης Χαρίχος, (2015), "Ανάπτυξη συστημάτων εικονικής πραγματικότητας", ISBN: 978-960-603-382-7, www.kallipos.gr*